Сивова Е. 511

Непрерывные математические модели.

Математические модели:

1) Классическая механика
   законы механики, закон сохранения энергии
   закон сохранения импульса; Кеплерова задача

2) Экономика
   модель Леонтьева

3) Модели коллективного поведения
   задача динамического программирования (размещение денег в банке), оптимального управления (поведение рекламных агентов)

I. Классическая механика

Аристотель разделял тела на три типа:
- всегда неподвижные
- всегда движущиеся
- вынужденно движущиеся $\quad \vec F = \alpha \vec v$

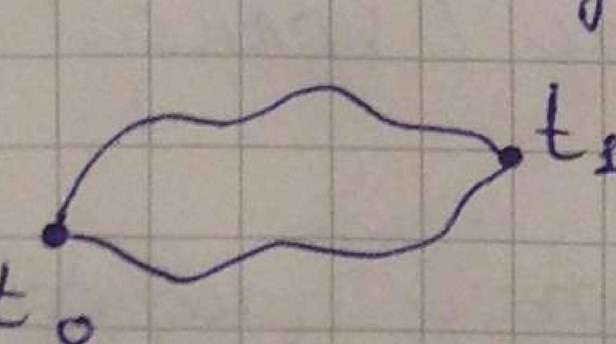
$\vec r(t) \qquad \vec r = \vec R + \vec r\,'$

$$\vec v = \frac{d\vec r}{dt} = \frac{d\vec R}{dt} + \frac{d\vec r\,'}{dt} \to \vec v = \underset{\substack{\uparrow \\ const}}{\vec u} + \vec v\,' \to \dot{\vec v} = \cancel{\dot{\vec u}} + \dot{\vec v}\,'$$

$$\begin{cases} \vec v = \vec u + \vec v\,' \\ t = t' \end{cases}$$ (т.к. время во всех системах одинаково)

Принцип наименьшего действия

Механическое состояние системы считается определенным в момент времени t', если оно позволяет предсказать положение системы в послед. моменты времени → необходимо, чтобы были заданы координаты в t' и обобщ. скорости в t', что позволяет в принципе предсказать дальнейшее движение системы.



Из всех траекторий, по которым система могла бы перейти из положения $x^{(0)}$ в $x^{(1)}$ реализуется та, кот. доставляет min интегралу, кот. наз-ся действием

$$S = \int_{t_0}^{t_1} L(\vec x, \dot{\vec x}, t)\, dt$$

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(\vec q_1, \vec q_2, \ldots, \vec q_N, \dot{\vec q}_1, \dot{\vec q}_2, \ldots, \dot{\vec q}_N, t)\, dt \to \min,$$

где $\vec q_i$ - обобщ. координаты точек тела

Необх. условие экстремальности инт. явл. обращение в 0 его первой вариации (причем все q_i варьируются независимо)

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t)\, dt = 0$$

$$(\delta S)_i = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right) dt = 0$$

$\delta \dot{q}_i = \frac{d}{dt} \delta q_i$ $\rightarrow$ интегрируем 2ю часть по частям

$$(\delta S)_i = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i\, dt + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \delta q_i \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} dt =$$

$$= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right] \delta q_i\, dt = 0$$

$\delta q_i (t_1) = \delta q_i (t_2) = 0 \longrightarrow$

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right] \delta q_i\, dt = 0 \quad \forall \delta q_i \leftrightarrow$$

! $\left\{ \frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right.$ $\forall i = \overline{1, N}$ – уравнения Лагранжа (в ВИ – Эйлера)

Ф-ии Лагранжа для различных мех. систем

$$L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) \; ; \quad L' = L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) + \frac{d}{dt} f(q, t)$$

полная произв. по времени

$$S' = \int_{t_0}^{t_1} L'(q, \dot{q}, t) = \int_{t_0}^{t_1} L(q, \dot{q}, t) + \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} f(q, t)\, dt =$$

$$= S + f(q^{(1)}, t_1) - f(q^{(0)}, t_0)$$

При варьировании действия $f(1) - f(0)$ исчезает, т. е. вид ур-ий Лагранжа остается. Т. о. ф-ия Лагранжа опр. с точностью до слагаемого (полная произв. от нек. ф-ии коорд. и вр.)

Выбор ф-ии Лагранжа: изотропность и однородность пр-ва, однородность времени. Ф. Л. не зависит от q и t и направления $\dot{\vec{q}}$, только от модуля скорости $|\dot{\vec{q}}|$, т. е.

$$L = L(v^2) \longrightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v} = 0 \longrightarrow \frac{\partial L}{\partial v} = const \rightarrow$$

! (1й з-н Ньютона) $v = const$:

GODZINA TIME 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22
DZIEŃ DAY 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31
MIESIĄC MONTH 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

$$\left\{ \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = \frac{\partial L}{\partial \vec{r}} = 0 \right.$$

$$v^2 = \xi = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$$

$$\frac{\partial L(v^2)}{\partial v} = \left(\frac{\partial L(v^2)}{\partial x}, \frac{\partial L(v^2)}{\partial y}, \frac{\partial L(v^2)}{\partial z}\right) =$$

$$= \frac{\partial L}{\partial \xi}\left(\frac{\partial \xi}{\partial v_x}, \frac{\partial \xi}{\partial v_y}, \frac{\partial \xi}{\partial v_z}\right) = 2\frac{\partial L}{\partial \xi}(v_x, v_y, v_z) = 0$$

$\exists\ \frac{\partial L}{\partial \xi} = const$ – дост. усл-ие для того, чтобы ф. Л. не менялась при переходе к различным с.к.

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v} = 2\frac{dL}{d\xi}(\dot{v}_x, \dot{v}_y, \dot{v}_z) = 0 \to (\dot{v}_x, \dot{v}_y, \dot{v}_z) = 0 \}$$

Т.о. в с.о., где пр-во изотропно и однородно, всякое свободное движение м.т. происходит с постоянной по величине и напр. скоростью.

$\exists$ инерциальная с.о. K движется отн. и.с.о. K' со скор. u, т.е. $v' = v + u$. Тогда

$$L' = L(v'^2) = L((v+u)^2) = L(\langle \vec{v}+\vec{u}, \vec{v}+\vec{u}\rangle) =$$

$$= L(v^2 + 2\langle \vec{v}, \vec{u}\rangle + u^2) = \{ \text{по т. Лагранжа}$$

$$f(x_2) = f(x_1) + f'(\tilde{x})(x_2 - x_1) \} = L(v^2) + \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \xi}(2\langle \vec{v}, \vec{u}\rangle + u^2)}_{\text{полная пр-ая по } t}$$

$$\frac{d}{dt}\langle \vec{r}, \vec{v}\rangle = \langle \vec{v}, \vec{v}\rangle$$

$$L = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i v_i^2}{2} - U(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N)$$

кинетическая э. потенциальная э.

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \vec{v}_i} - \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} = 0 \quad \forall\ i = \overline{1,N}$$

! $m_i \frac{d}{dt}\vec{v}_i = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}_i} \to m_i \dot{\vec{v}}_i = \vec{F}_i$ (2й з-н Ньютона)

Законы сохранения.

- Однородность времени.

Ф. П. замкнутой системы не зависит явно от времени.

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \left\langle \frac{\partial L}{\partial r_i}, \vec{v}_i \right\rangle + \sum_{i=1}^{N} \left\langle \frac{\partial L}{\partial v_i}, \dot{\vec{v}}_i \right\rangle + \frac{\partial L}{\partial t}^{=0}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \vec{v}_i}$$

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \left\langle \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \vec{v}_i}, \vec{v}_i \right\rangle + \left\langle \frac{\partial L}{\partial v_i}, \dot{\vec{v}}_i \right\rangle = \sum_{i=1}^{N} \frac{d}{dt} \left\langle \frac{\partial L}{\partial v_i}, \vec{v}_i \right\rangle =$$

$$= \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{N} \left\langle \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_i}, \vec{v}_i \right\rangle$$

$$\frac{d}{dt}\left[\sum_{i=1}^{N} \left\langle \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_i}, \vec{v}_i \right\rangle - L \right] = 0 \rightarrow \sum_{i=1}^{N} \left\langle \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_i}, \vec{v}_i \right\rangle - L = const$$

$$\sum_{i=1}^{N} \langle m_i \vec{v}_i, \vec{v}_i \rangle - \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i v_i^2}{2} + U(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N) = const$$

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{m_i v_i^2}{2} + U(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N) = const$$

! Полная энергия замкн. системы постоянна. (Консервативные механические системы)

- Однородность пространства.

В замкн. мех. сист. означает неизменность св-в системы при $\forall$ параллельном переносе $r_i^* = r_i^* + \rho$

Ф. П. не изменится при подстановке.

$$L(r_1, \dots, r_N, v_1, \dots, v_N) = L(r_1' + \rho, r_2' + \rho, \dots, r_N' + \rho, v_1, \dots, v_N)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \rho} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial r_i} = 0$$

P – импульс

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial r_i} = \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_i} = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{N} m_i v_i = 0 \rightarrow P = const$$

! Импульс системы остается неизменным при движении.

С др. стороны, $= \frac{\partial L}{\partial r_i} = -\frac{\partial U}{\partial r_i} = F_i$, т. е. сумма сил, действ. на <u>все</u> части замкн. системы, равна нулю

! $\sum_{i=1}^{N} F_i = 0$ (III з-н Ньютона)

В случае сист. из 2 точек – закон равенства действия и противодействия $F_{21} = F_{12}$

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial r_i} = -\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial U}{\partial r_i} = 0 \rightarrow$$ U – ф-ия первых интегралов системы ОДУ $\left\{ \frac{\partial r_i}{\partial t} = \frac{\partial r_{i+1}}{\partial t}, \quad i=\overline{1,N-1} \right.$

Первые инт. этой системы $r_i = r_{i+1} + C_i$

Т.о. $U = U(r_1 - r_2, r_2 - r_3, \ldots, r_{N-1} - r_N)$, т.е. потенц. эн. замкн. системы зависит от взаимного положения точек системы.

$$\left\{ \begin{array}{l} p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot q_i} \text{ – обобщенные импульсы} \\ F_i = \frac{\partial L}{\partial q_i} \text{ – обобщенные силы} \end{array} \right. \rightarrow \dot p_i = F_i, \quad i=\overline{1,N}$$

$\exists$ инерц. с.о. K' движется отн. K со скоростью V. Тогда

$$P = \sum_{i=1}^{N} m_i v_i = \sum_{i=1}^{N} m_i v_i' + V\sum_{i=1}^{N} m_i = P' + V\sum_{i=1}^{N} m_i$$

т.е. можно выбрать такую K', в которой полный импульс равен нулю $(P'=0)$,

$$V = \frac{P}{\sum_{i=1}^{N} m_i} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{N} m_i v_i$$

Говорят, что мех. система покоится отн. некоторой с.о, если в этой с.о. ее импульс равен нулю.

$R = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{N} m_i r_i$ – цент инерции системы

Рассмотрим систему взаимодействующих мат. точек, движ. в нек. внешнем поле.

$$L = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i v_i^2}{2} - U(r_1 - r_2, r_2 - r_3, \ldots, r_{N-1} - r_N) - U_{вн}(r_1, \ldots, r_N)$$

$U_{вн}$ – потенц. э. внешнего поля

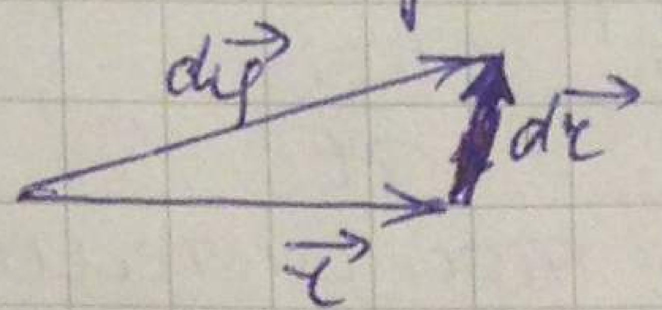
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \vec v_i} = \frac{\partial L}{\partial \vec r_i} \rightarrow \frac{d}{dt} m_i \vec v_i = -\frac{\partial U}{\partial \vec r_i} - \frac{\partial U_{вн}}{\partial \vec r_i}$$

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N} m_i \vec v_i = \underbrace{-\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial U}{\partial \vec r_i}}_{\text{по III з. Н. } =0} + \sum_{i=1}^{N} F_{i\,вн}$$

$m\frac{dV}{dt} = F_{вн}$ – систему точек можно рассматривать как м.т. с суммарной массой m.

- Изотропия пространства (Свойства замкнутой м.с. не меняются при любом повороте системы как целого в пр-ве)

Малый поворот на $\delta\varphi$



$$[d\vec{\varphi}\times\vec{r}] = d\vec{r}$$

$$\delta r_i = [\delta\varphi\times r_i] \qquad \delta\vartheta_i = [\delta\varphi\times\vartheta_i]$$

$$\delta L = \sum_{i=1}^{N}\left[\frac{\partial L}{\partial r_i}\delta r_i + \frac{\partial L}{\partial \vartheta_i}\delta\vartheta_i\right] = 0$$

$$\sum_{i=1}^{N}\left[\dot{p}_i[\delta\varphi\times r_i] + p_i[\delta\varphi\times\vartheta_i]\right] = 0$$

$$\delta\varphi\sum_{i=1}^{N}\left[[r_i\times\dot{p}_i] + [\vartheta_i\times p_i]\right] = 0$$

Т. к. $\delta\varphi$ произвольно, $\sum\limits_{i=1}^{N}[r_i\times\dot{p}_i] + [\vartheta_i\times p_i] = \frac{d}{dt}\sum\limits_{i=1}^{N}[r_i\times p_i] = 0$

! $M = \sum\limits_{i=1}^{N}[r_i\times p_i] = const$ – момен импульса

Момент импульса зависит от выбора начала координат

$$r = r' + h \to M = \sum_{i=1}^{N}[r_i\times p_i] = \sum_{i=1}^{N}[(r_i'+h)\times p_i] =$$

$$= \sum_{i=1}^{N}[r_i'\times p_i] + [h\times\sum_{i=1}^{N}p_i] = M' + [h\times P]$$

$$M = M' \Leftrightarrow \begin{matrix} 1)\ P = 0 \\ 2)\ \vec{h}\parallel\vec{P}\end{matrix}$$

$\exists$ K' движется отн. K со скоростью V: $r = r' + Vt$, $\vartheta = \vartheta' + V$

$$\sum_{i=1}^{N}m_i[r_i\times\vartheta_i] = \sum_{i=1}^{N}m_i[r_i'\times\vartheta_i'] + \sum_{i=1}^{N}m_i[r_i'\times V] +$$

$$+ \sum_{i=1}^{N}m_i[V\times\vartheta_i']t + \sum_{i=1}^{N}m_i[V,V]t = M' + m[R'\times V]$$

$$+ [V\times P']t$$

Если $R' = 0 \to P' = 0 \to M = M'$

Поместим систему м.т. во внешнее поле.

$$L = \sum_{i=1}^{N}\frac{m_i\vartheta_i^2}{2} - U(r_1 - r_2, r_2 - r_3, \ldots, r_{N-1} - r_N) - U_{вн}(r_1, r_2, \ldots, r_N)$$

$$\frac{\partial L}{\partial r_i} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i}$$

$m_i\dot{\vartheta}_i = -\frac{\partial U}{\partial r_i} - \frac{\partial U_{вн}}{\partial r_i}$ $\Big|$ $\times r_i$ (слева векторно) и Σ

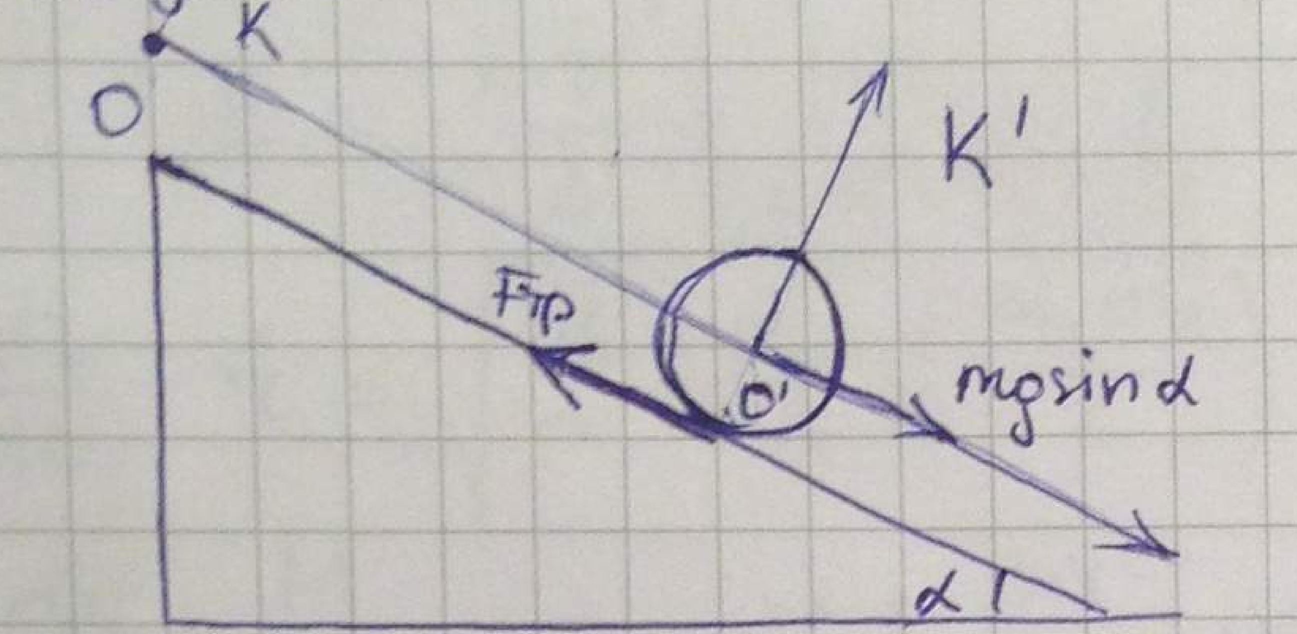
$$\sum_{i=1}^{N}m_i[r_i\times\dot{\vartheta}_i] = -\sum_{i=1}^{N}\left[r_i\times\frac{\partial U}{\partial r_i}\right] - \sum_{i=1}^{N}\left[r_i\times\frac{\partial U_{вн}}{\partial r_i}\right]$$

$$\sum_{i=1}^{N} m_i [r_i \times \dot{v}_i] = \sum_{i=1}^{N} m_i [r_i \times \dot{v}_i] + \sum_{i=1}^{N} m_i [\dot{r}_i \times v_i] = \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N} m_i [r_i \times v_i] = \frac{dM}{dt}$$

$$\rightarrow \frac{dM}{dt} = -\sum_{i=1}^{N}\left[r_i \times \frac{\partial U}{\partial r_i}\right] - \sum_{i=1}^{N}\left[r_i \times \frac{\partial U_{вн}}{\partial r_i}\right]$$

Если бы вн. поля не было, $\frac{dM}{dt} = 0 \rightarrow \sum_{i=1}^{N}\left[r_i \times \frac{\partial U}{\partial r_i}\right] = 0$

Задача (о скатывании цилиндра с накл. пл.)



$$m\frac{dv}{dt} = mg\sin\alpha - F_{тр}, \quad v = R\omega$$

$$dM = \underbrace{2\pi\rho r\, dr\, L}_{dm}\, r \cdot r\omega$$

$$M = 2\pi\rho L\omega \int_0^R r^3 dr = 2\pi R^2 L\rho \frac{\omega R^2}{4} =$$

$$\frac{dM}{dt} = R \cdot F_{тр}$$

$$= J\omega, \quad J = \frac{1}{2}mR^2 \text{ — мом. инерции}$$

$$mR\frac{d\omega}{dt} = mg\sin\alpha - \frac{1}{R}\frac{dM}{dt} = mg\sin\alpha - \frac{1}{R}J\frac{d\omega}{dt}$$

$$\frac{3}{2}R\frac{d\omega}{dt} = \frac{3}{2}\frac{dv}{dt} = g\sin\alpha \rightarrow \frac{dv}{dt} = \frac{2}{3}g\sin\alpha$$

$$v = v_0 + g\sin\alpha \cdot t$$

$$S = S_0 + v_0 t + \frac{1}{3}g\sin\alpha\, t^2$$

Законы Кеплера.

- Планеты обращаются вокруг Солнца по эллипсам, в фокусе которых нах-ся Солнце.
- За равные промежутки времени радиус-вектор планеты заметает при ее движении равные площади
- Квадраты времен обр-ия планет пропорциональны кубам больших осей их орбит. (!), т.е. ∃ подобие

$U(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_N)$ — однородная ф-ия степени k:

$$U(\Lambda\vec{r}_1, \Lambda\vec{r}_2, \ldots, \Lambda\vec{r}_N) = \Lambda^k U(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_N)$$

$r_i = \Lambda\rho_i$, $t = \mu\tau$, где t — время наблюдения за Землей, τ — за Марсом

$$L = \sum_{i=1}^{N}\frac{m_i v_i^2}{2} - U(r_1 - r_2, r_2 - r_3, \ldots, r_{N-1} - r_N) \ominus$$

$$v = \frac{dr}{dt} = \frac{\Lambda}{\mu}\frac{d\rho}{d\tau} = \frac{\Lambda}{\mu}v'$$

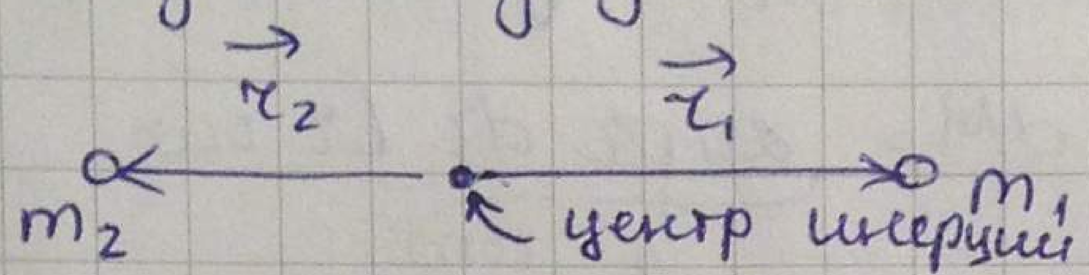
$$\ominus \frac{\Lambda^2}{\mu^2}\sum_{i=1}^{N}\frac{m_i v_i'^2}{2} - \Lambda^k U(\rho_1 - \rho_2, \ldots, \rho_{N-1} - \rho_N)$$

] $\frac{\lambda^2}{\mu^2} = \lambda^k \to \mu = \lambda^{1-\frac{k}{2}} \to L(r_1, \dots, r_N, \vartheta_1, \dots, \vartheta_N) = \lambda^k L(\rho, \vartheta')$

$\left(\frac{t}{\tau}\right)^2 = \left(\frac{r}{\rho}\right)^3$

$\mu^2 = \lambda^3$, $\mu^2 = \lambda^{2-k} \to k = -1$, т.е. потенц. энергия поля тяготения есть однородная ф-ия степени -1.

Задача двух тел.



$$L = \frac{m_1 \vartheta_1^2}{2} + \frac{m_2 \vartheta_2^2}{2} - U(|r_1 - r_2|)$$

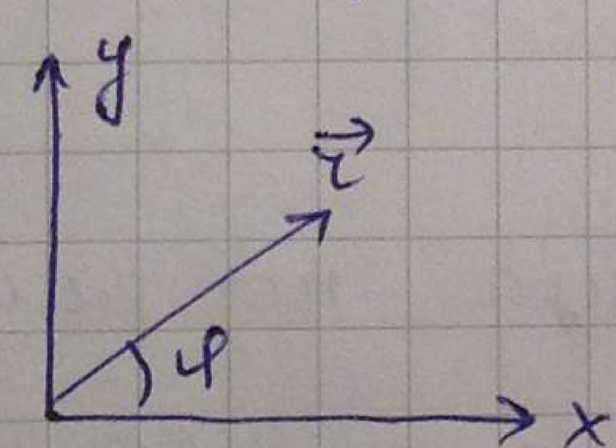
$$m_1 r_1 + m_2 r_2 = 0, \quad r = r_1 - r_2 \to r_1 = \frac{m_2}{m_1+m_2} r, \quad \vartheta_1 = \frac{m_2}{m_1+m_2}\vartheta$$

$$r_2 = -\frac{m_1}{m_1+m_2} r, \quad \vartheta_2 = -\frac{m_1}{m_1+m_2}\vartheta$$

$$L = \left[\frac{m_1}{2}\frac{m_2^2}{(m_1+m_2)^2} + \frac{m_2 m_1^2}{2(m_1+m_2)}\right]\vartheta^2 - U(r) = \frac{m\vartheta^2}{2} - U(r), \text{ где}$$

$m = \frac{m_1 m_2}{(m_1+m_2)}$ – приведенная масса.

Переходим к полярной СК.



$$\vartheta^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2$$

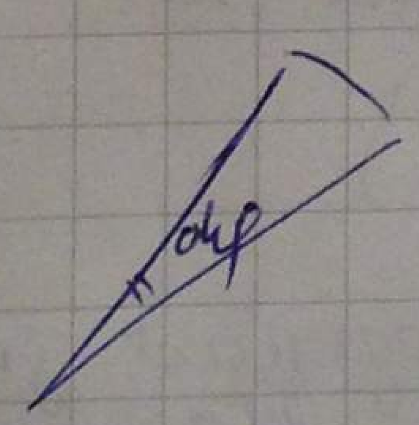
$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - U(r)$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = 0$$

$$\frac{d}{dt} m r^2 \dot{\varphi} = 0$$

$$m r^2 \dot{\varphi} = const$$



$\sin\varphi = \varphi$ при $\varphi \approx 0$

$$ds = \frac{1}{2} r^2 \sin d\varphi = \frac{1}{2} r^2 d\varphi$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\varphi}, \text{ т.е. } 2\dot{s} = r^2\dot{\varphi} = \cancel{const} \to \dot{s} = const$$

GODZINA TIME 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22
DZIEŃ DAY 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31
MIESIĄC MONTH 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

$$\exists \; U(r) = -\frac{c(m_1, m_2)}{r} = -f(m_1, m_2)\,\frac{m_1 m_2}{r}$$

Кеплерова задача

$$E = \frac{m}{2}\left(\dot r^2 + r^2 \dot\varphi^2\right) - f\frac{m_1 m_2}{r} = const$$

$$M = m r^2 \dot\varphi = const$$

$$E = \frac{m\dot r^2}{2} + \frac{M^2}{2m r^2} - f\frac{m_1 m_2}{r}$$

$$\frac{dr}{dt} = \dot r = \sqrt{\frac{2}{m}\left(E + f\frac{m_1 m_2}{r}\right) - \frac{M^2}{m^2 r^2}}$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{M}{m r^2} \rightarrow dt = \frac{m r^2}{M}\, d\varphi$$

$$E + f\frac{m_1 m_2}{r} - \frac{M^2}{2mr^2} \geq 0$$

$$2mEr^2 + 2mm_1m_2fr - M^2 \geq 0$$

$$4m^2m_1^2m_2^2f^2r^2 - \cancel{8}^{\,2}\cancel{m}E\cancel{2}M^2 \geq 0$$

$$E \geq -\frac{mm_1^2m_2^2f^2}{2M^2} = E_{min}$$

$$t = \int \frac{dr}{\sqrt{\quad}} + C$$

$$\varphi = \int \frac{\frac{M}{mr^2}\, dr}{\sqrt{\quad}} + C = \int \frac{dr}{r^2\sqrt{\frac{2m}{M^2}\left(E + f\frac{m_1m_2}{r}\right) - \frac{1}{r^2}}}$$

$$\varphi = \arccos\frac{\frac{M}{r} - \frac{mm_1m_2f}{M}}{\sqrt{2mE + \frac{m^2m_2^2m_1^2f^2}{M^2}}} + const$$

$$p = \frac{M^2}{mm_1m_2f}, \quad e = \sqrt{1 + \frac{2EM^2}{m^2m_1^2m_2^2f^2}}$$

$$\frac{p}{r} = 1 + e\cos\varphi \rightarrow r(\varphi) = \frac{p}{1 + \cos\varphi \cdot e}$$ — уравнение конич. сечения с фокусом в нач. коорд, p – параметр, e – эксцентриситет

1. $E < 0 \rightarrow e < 1 \rightarrow$ эллипс
   $E = E_{min} \rightarrow e = 0 \rightarrow$ окружность
2. $E = 0 \rightarrow e = 1 \rightarrow$ парабола
3. $E > 0 \rightarrow e > 1$ – гипербола

WAŻNE NOW

Panta Plast

Колебательное движение.

1) $\ddot{u}(t) + \omega_0^2 u(t) = 0$ ← однородное ур-ие колебаний

$u(t) = a\sin(\omega_0 t) + b\cos(\omega_0 t)$ – общее решение
(a и b – const)

2) $\ddot{u}(t) + \omega_0^2 u(t) = A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t)$ ← неоднородн.

ω_0 – собств. частота колебаний

ω – нагруженная частота колебаний на систему

Если $\omega_0 = \omega$ – резонанс (у моста разрушение)

$u(t) = u_{общ}(t) + \bar{u}_{част}(t)$

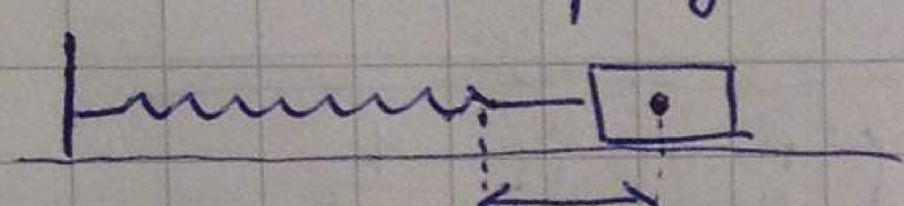
$\bar{u}_{част}(t) = A_1\sin(\omega t) + B_1\cos(\omega t)$

Подставляем в ур-ие →

$A_1 = \dfrac{A}{\omega_0^2 - \omega^2}$; $B = \dfrac{B}{\omega_0^2 - \omega^2}$

При $\omega_0 \to \omega$ амплитуда резко возрастает

<u>Задача</u> (О колебании грузика на пружине на горизонт. пл-сти)



Работа совершается для растягивания пружины (вправо)

$\int_0^z kx\,dx = \dfrac{kz^2}{2}$ (z – положение несжатой пружины)

$L = \dfrac{m\dot{x}^2}{2} - \dfrac{kx^2}{2}$

$\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \dfrac{\partial L}{\partial x}$

$m\ddot{x} = -kx$

$m\ddot{x} + kx = 0$ → однородное ур-ие колебаний с $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$

$x(t) = a\sin(\omega_0 t) + b\cos(\omega_0 t)$

a и b ищем из н. у.

1) $x(0) = x_0 \to b = x_0$

$\dot{x}(0) = 0 \to a = 0$

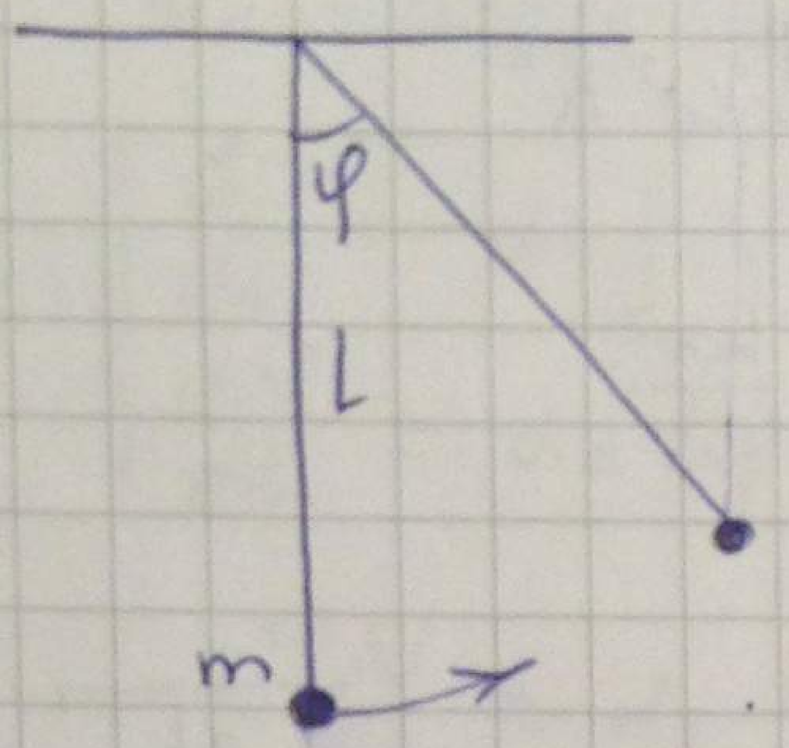
$x(t) = x_0\cos\left(\sqrt{\dfrac{k}{m}}\,t\right)$

2) $x(0) = 0 \to b = 0$

$\dot{x}(0) = \vartheta \to +a\omega_0 = \vartheta$, $a = +\dfrac{\vartheta}{\omega_0}$

$x(t) = \dfrac{\vartheta}{\omega_0}\sin\left(\sqrt{\dfrac{k}{m}}\,t\right)$

Задача (о физ. маятнике)



$U = mgh = mg(L - L\cos\varphi) = mgl(1-\cos\varphi)$

$L = \frac{m(L\dot\varphi)^2}{2} - mgl(1-\cos\varphi)$

$ml^2\ddot\varphi = -mgl\sin\varphi$

$\ddot\varphi + \frac{g}{L}\sin\varphi = 0$ - ур-ие маятника

Неоднородное с $\omega_0 = 0$, $A = -\frac{g}{L}$, $\omega = 1$, $B = 0$

? **Задача** (о движении ~~в~~ цилиндра по поверхности)

Есть система точек: m_i, $\vec{r}_i$, $\vec{v}_i = \dot{\vec{r}}_i$

$\vec{P} = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i = 0$

$E = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i v_i^2}{2} - U(\vec{r}_1 - \vec{r}_2, r_2 - r, \dots, r_{N-1} - r_N)$

Переходим в др. СК $\dot{\vec{R}} = V$

$r_i' = r_i - R$

$\vec{v}_i' = \vec{v}_i - \vec{v}$

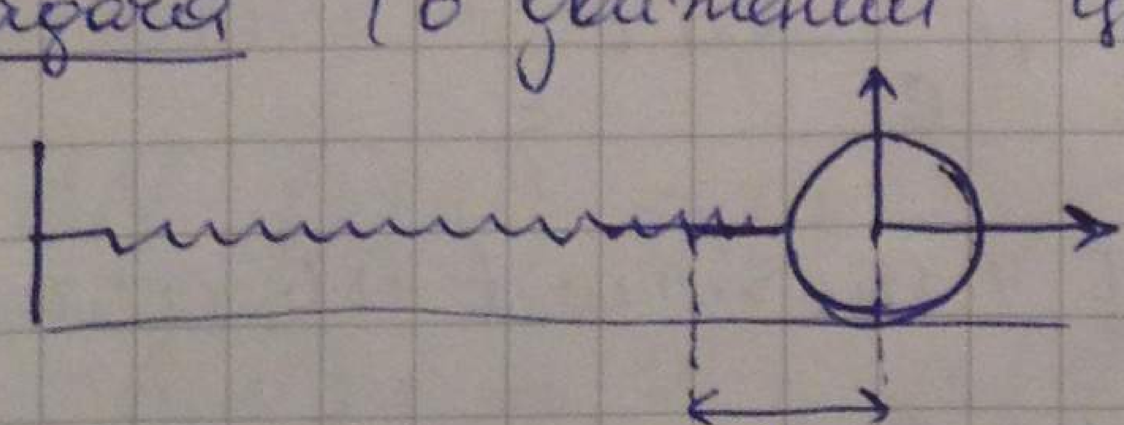
$E' = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i \langle \vec{v}_i - \vec{v}, \vec{v}_i - \vec{v} \rangle}{2} + U(\vec{r}_1 - \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_{N-1} - \vec{r}_N) =$

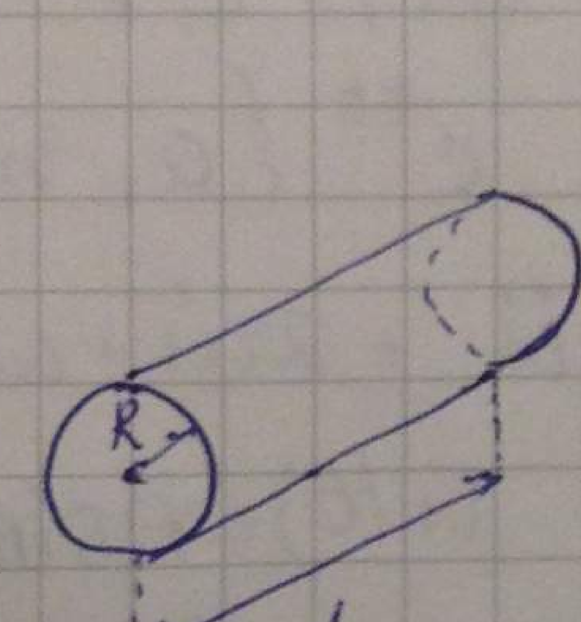
$= \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i v_i^2}{2} + \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i v^2}{2} - \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i \langle v_i, v \rangle}{2} + U =$

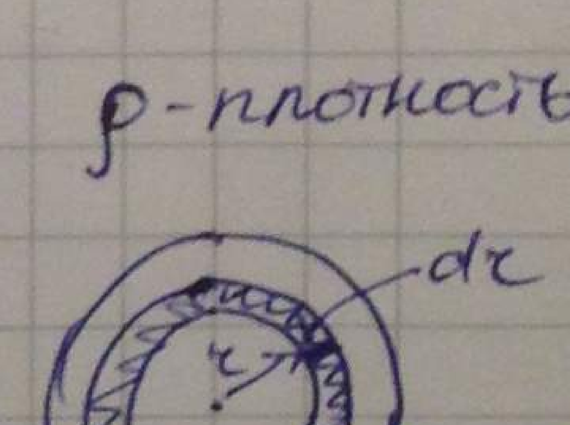
$= E_{вн} + M\frac{v^2}{2} - \langle \underbrace{\sum_{i=1}^{N} m_i v_i}_{=0}, \vec{v} \rangle$

$E' = E_{вн} + M\frac{v^2}{2}$

Задача (о движении цилиндра на пружине)







$E = \frac{Mv^2}{2} + \frac{kx^2}{2} + E_{вн}$

$E_{вн} = E_{вращения}$

Все точки кольца движ-ся со скоростью ωr

$$dE_{вр} = 2\pi l \rho r\,dr \frac{(\omega r)^2}{2} = \pi l \rho \omega^2 r^3\,dr$$

$$E_{вр} = \int_0^R \pi l \rho \omega^2 r^3\,dr = \pi l \rho \omega^2 \frac{R^4}{4} = \frac{M}{4}\omega^2 R^2$$

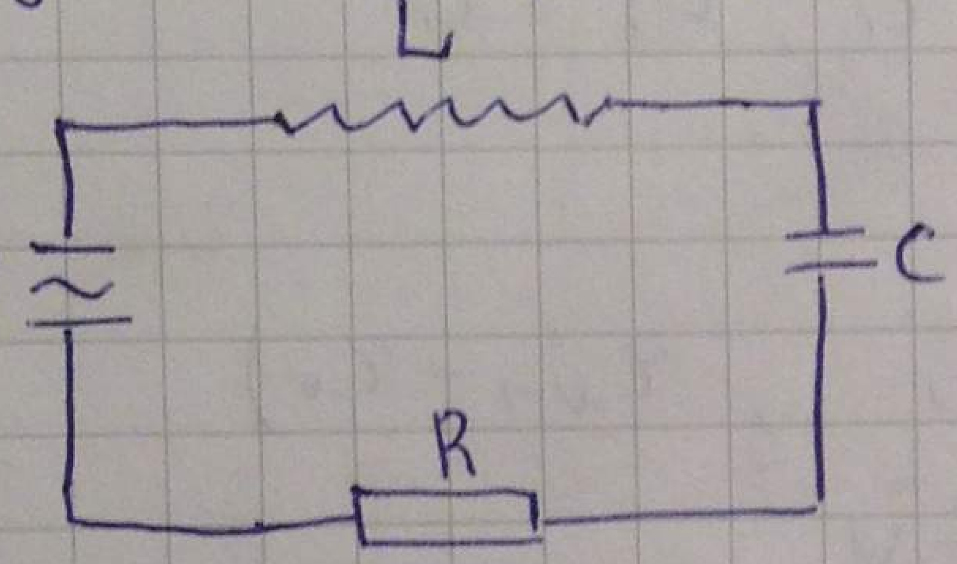
$$E = \frac{Mv^2}{2} + \frac{Mv^2}{4} + \frac{kx^2}{2} = \frac{3}{4}M\dot{x}^2 + \frac{kx^2}{2}$$

$$L = \frac{3}{4}M\dot{x}^2 - \frac{kx^2}{2} \rightarrow \omega_0$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial L}{\partial x} \rightarrow \frac{3}{2}M\ddot{x} = -kx \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{3M}}$$

$$\ddot{x} + \frac{2k}{3M}x = 0$$ – ур-ие гармонич. колебаний

<u>Задача</u> (Пример электрических колебаний)



Изменение заряда в пластинах конденсатора

закон Кирхгофа, сумма падений напряжения $=0$

$$L\ddot{q} + \frac{q}{C} + \dot{q}R + U = 0$$

$$\ddot{q} + \underbrace{\frac{R}{L}}_{=2r}\dot{q} + \underbrace{\frac{q}{LC}}_{=\mu} = F(t)$$ – ур-ие колебаний

$$(\lambda^2 + 2r\lambda + \mu)e^{\lambda t} = 0$$

$\exists r > 0$ $\quad \lambda_{1,2} = -r \pm \sqrt{r^2 - \mu} = -r \pm i\sqrt{\mu}$

$$q(t) = C_1 e^{-rt} e^{i\sqrt{\mu}t} + C_2 e^{-rt} e^{-i\sqrt{\mu}t} =$$

$$= e^{-rt}(a_1 \sin\omega_0 t + b_1 \cos\omega_0 t + i a_2 \sin\omega_0 t + i b_2 \cos\omega_0 t)$$

$$\ddot{u} + 2r\dot{u} + \omega_0^2 u = A\sin\omega t + B\cos\omega t$$

$$\bar{u}(t) = A_1 \sin\omega t + B_1 \cos\omega t$$

$$A_1 = \frac{A(\omega_0^2 - \omega^2) + B\frac{r}{2}\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2) + \frac{r^2}{4}\omega^2} \qquad B_1 = \frac{B(\omega_0^2 - \omega^2) - A\frac{r}{2}\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2) + \frac{r^2}{4}\omega^2}$$

Задача (равновесие положения сотрудников в фирме)

N_0 - сотрудники, p_0 - з/п - равновесие

$$\begin{cases} \frac{dp}{dt} = -\alpha_1 (N - N_0), \quad \alpha_1 > 0 \\ \frac{dN}{dt} = \alpha_2 (p - p_0), \quad \alpha_2 > 0 \end{cases}$$

$$\frac{d^2N}{dt^2} = \alpha_2 \frac{dp}{dt} = -\alpha_1\alpha_2 (N - N_0)$$

$$z_1 = N - N_0$$
$$\ddot{z}_1 + \alpha_1\alpha_2 z_1 = 0$$

$$\frac{d^2p}{dt^2} = -\alpha_1 \frac{dN}{dt} = -\alpha_1\alpha_2 (p - p_0)$$
$$z_2 = p - p_0$$
$$\ddot{z}_2 + \alpha_1\alpha_2 z_2 = 0$$

$$\begin{cases} \ddot{z}_1 + \alpha_1\alpha_2 z_1 = 0 \\ \ddot{z}_2 + \alpha_1\alpha_2 z_2 = 0 \end{cases}$$

$\alpha_1 z_1^2 + \alpha_2 z_2^2 = const$ - первый интеграл системы ур-ий

$$\alpha_1 z_1 \dot{z}_1 + \alpha_2 z_2 \dot{z}_2 = 0$$

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = \dot{N} = \alpha_2 (p - p_0) \\ \dot{z}_2 = \dot{p} = -\alpha_1 z_1 \end{cases}$$

Колебания не затухающие

Задача (о динамике популяции)

$N(t)$ - кол-во особей
$\alpha(N)$ - коэфф. рождаемости
$\beta(N)$ - -"- смертности

$$\frac{dN}{dt} = (\alpha(N) - \beta(N))N$$

$$\alpha(N) = \alpha_0 \cdot N, \quad \beta(N) = \beta_0$$

$$\frac{dN}{dt} = \alpha_0 N^2 - \beta_0 N$$

$$\int \frac{dN}{\alpha_0 N^2 - \beta_0 N} = \int dt$$

$$\frac{1}{\beta_0} \int \left[\frac{\alpha_0}{\alpha_0 N - \beta_0} - \frac{1}{N} \right] dN = \int dt$$

$$\frac{1}{\beta_0}\left[\ln(\alpha_0 N-\beta_0)-\ln N\right]=t-C$$

$$\ln\left(\alpha_0-\frac{\beta_0}{N}\right)=\beta_0 t-C$$

$$\left|\alpha_0-\frac{\beta_0}{N}\right|=Ce^{\beta_0 t}$$

1) $\exists\ N(0)=N_0<\frac{\beta_0}{\alpha_0}$

$$\frac{dN}{dt}=\alpha_0 N^2-\beta_0 N=\alpha_0 N\left(N-\frac{\beta_0}{\alpha_0}\right)<0$$, т.е. $N\searrow$

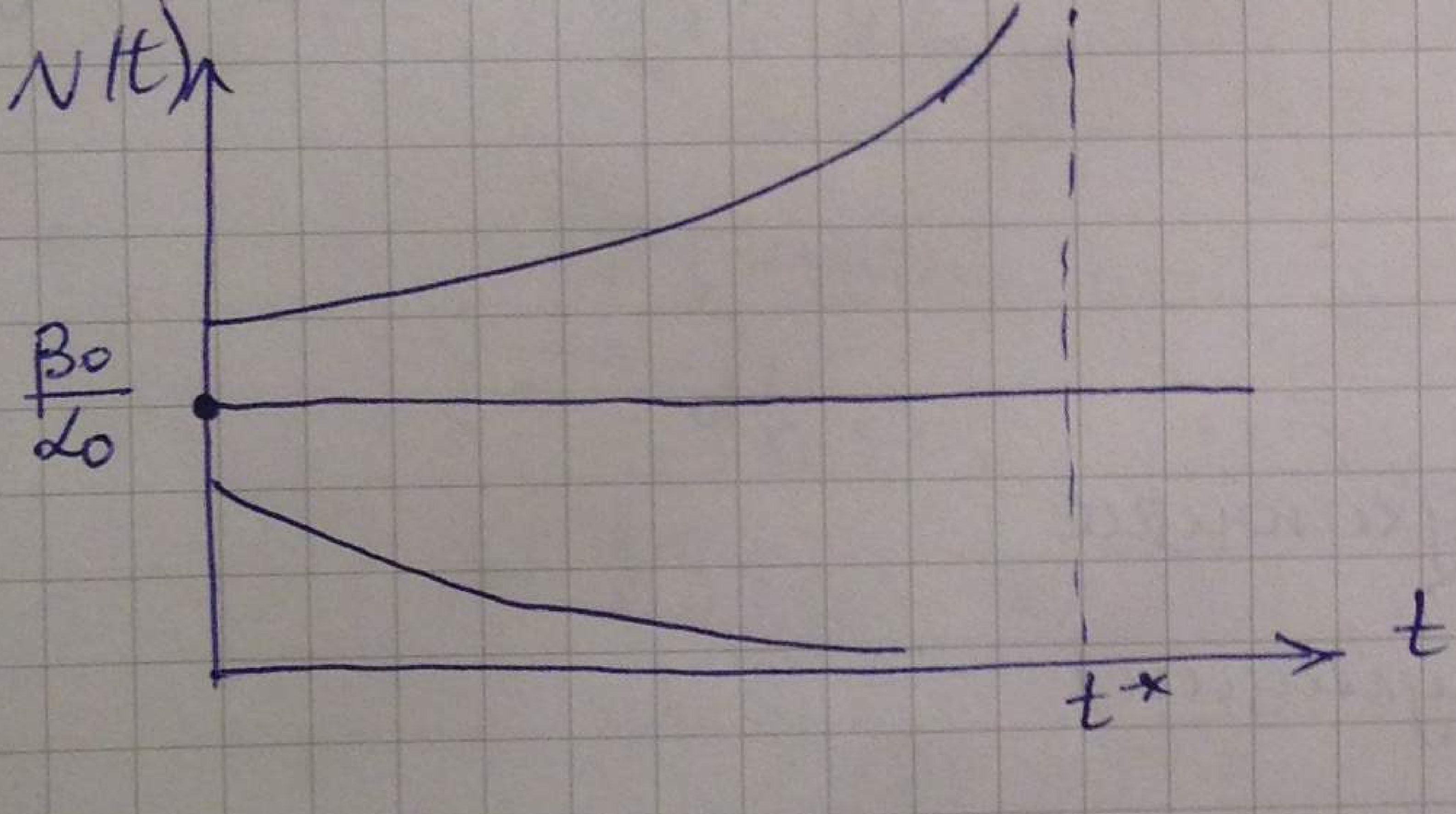
$$N(t)<N(0)<\frac{\beta_0}{\alpha_0}$$

2) $N_0=\frac{\beta_0}{\alpha_0}$

$\frac{dN}{dt}=0$ (не меняется со временем)

3) $N_0>\frac{\beta_0}{\alpha_0}$

$N\to\infty$ при $t\to t^*$



Модель хищник – жертва

$x(t)$ – хищник, m – коэфф. естест. смертности
$y(t)$ – жертва, α – коэфф. естест. прироста

$V(x)$ – кол-во жертв, потребляемых одним хищником за единицу времени, k-ая часть энергии идет на воспроизводство, остальное – на поддержание жизни.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \alpha x - V(x)y \\ \dfrac{dy}{dt} = y\big(kV(x) - m\big) \end{cases}$$

$V(x)$ – трофическая ф-ия хищника (functional responce)

$\exists\ V(x) = \beta x$, $k = const$, $\alpha, m - const$ – классич. модель Лотки-Вольтера

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \alpha x - \beta x y \\ \dfrac{dy}{dt} = (k\beta x - m)y \end{cases}$$

Стационарные точки $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{dy}{dt} = 0$

$$x^* = \frac{m}{k\beta}, \quad y^* = \frac{\alpha}{\beta}$$

~~Найдем~~ первый интеграл системы $\left(\dfrac{e^X}{X}\right)^m \left(\dfrac{e^Y}{Y}\right)^\alpha = C$

$X = \dfrac{x}{x^*}, \quad Y = \dfrac{y}{y^*}$

Модель Колмогорова

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \alpha(x)x - V(x)y \\ \dfrac{dy}{dt} = K(x)y \end{cases}$$

Предположения о $\alpha(x)$, $V(x)$ и $K(x)$

- $\alpha'_x < 0$, $\alpha(0) \geq 0 > \alpha(\infty)$ (внутривидовая конкуренция жертв за огр. ресурс), $\alpha(\bar{x}) = 0$
- $K'_x > 0$, $K(0) < 0 < K(\infty)$
- $V(x) > 0$ при $x > 0$, $V(0) = 0$

Стац. точки: $(0,0)$, $(\bar{x}, 0)$, (x^*, y^*)

Линеаризованная система.

$$\begin{cases} x = x^* + z_1 \\ y = y^* + z_2 \end{cases}$$

$$\frac{dz_1}{dt} = F(x^* + z_1, y^* + z_2) \overset{T}{=} \underset{\substack{\parallel \\ 0}}{F(x^*, y^*)} + \frac{\partial F(x^*, y^*)}{\partial x} z_1 + \frac{\partial F(x^*, y^*)}{\partial y} z_2 + o(|z_1|, |z_2|)$$

$$\frac{dz_2}{dt} = G \ldots = G(x^*, y^*) + \ldots + o(|z_1|, |z_2|)$$

$$\begin{cases} \dfrac{dz_1}{dt} = a_{11} z_1 + a_{12} z_2 \\ \dfrac{dz_2}{dt} = a_{21} z_1 + a_{22} z_2 \end{cases} \longrightarrow \frac{dz}{dt} = Az \rightarrow z(t) = h_1 e^{\lambda_1 t} + h_2 e^{\lambda_2 t}$$

$$\frac{dz}{dt} = \lambda_1 h_1 e^{\lambda_1 t} + \lambda_2 h_2 e^{\lambda_2 t}$$

$$(a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{12} \cdot a_{21} = 0$$

$$\lambda^2 - \lambda \underbrace{(a_{11} + a_{22})}_{\text{след}} + a_{11} a_{22} - a_{12} \cdot a_{21} = 0$$

$$\lambda^2 - \operatorname{tr} A \cdot \lambda + \det A = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{\operatorname{tr} A \pm \sqrt{(\operatorname{tr} A)^2 - 4 \det A}}{2}$$

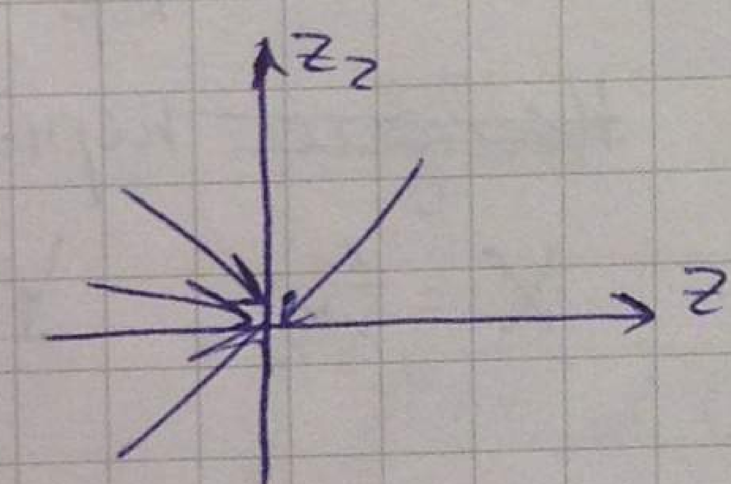
$\lambda_1 + \lambda_2 = \operatorname{tr} A$

$\lambda_1 \cdot \lambda_2 = \det A$

1) ~~Sp~~ $\operatorname{tr} A < 0$, $\det A > 0$, $D > 0$

$\lambda_1, \lambda_2 < 0$

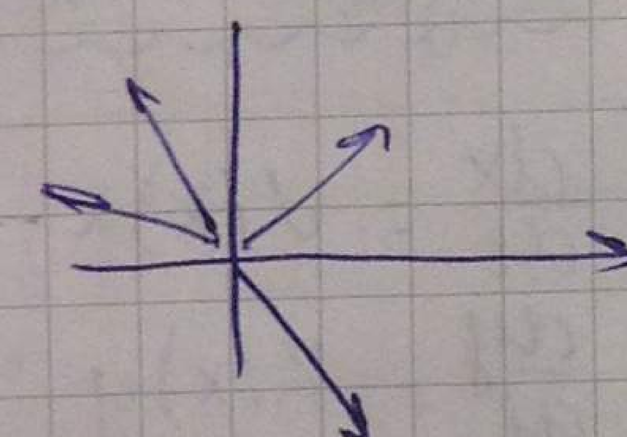
Движение точки по собств. векторам устойчиво (стремление к 0 – уст. узел)



2) $\operatorname{tr} A > 0$, $\det A > 0$, $D > 0$

$\lambda_1, \lambda_2 > 0$

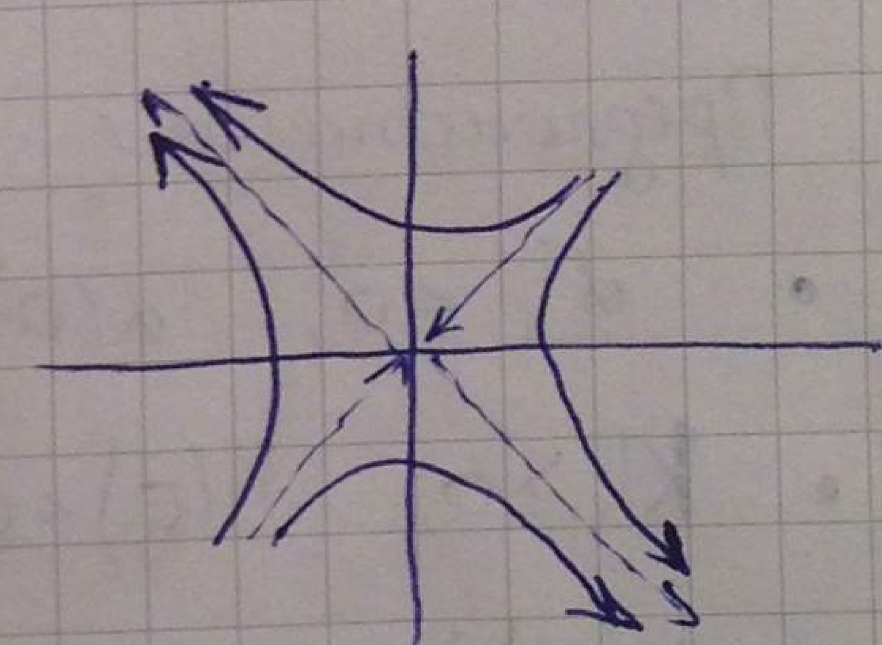
Неустойчивый узел



3) $\operatorname{tr} A < 0$, $\det A < 0$, $D > 0$

$\lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0$

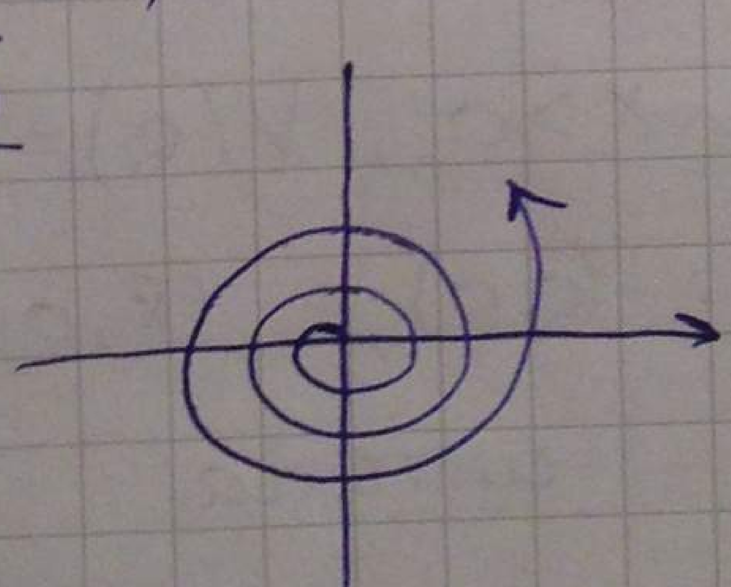
Седло (всегда неустойчиво)



4) $\operatorname{tr} A < 0$, $\det A > 0$, $D < 0$

$$\lambda_{1,2} = \frac{\operatorname{tr} A \pm i\sqrt{|D|}}{2}$$

Неуст. фокус



Исследуем стац. точки

1) $(0;0)$

$z_1 = x$, $z_2 = y$

GODZINA	TIME	6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22
DZIEN	DAY	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31
MIESIĄC	MONTH	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

$$\frac{dz_1}{dt} = \alpha(z_1)\cdot z_1 - V(z_1) z_2 = (\alpha(0) + \alpha'(0) z_1 + \ldots) z_1 -$$

$$- (V(0) + V'(0) z_1 + \ldots) z_2 = \alpha(0) z_1 + \bar{o}(|z_1|, |z_2|)$$

$$\frac{dz_2}{dt} = K(z_1) z_2 = \ldots = K(0) z_2 + \bar{o}(|z_1|, |z_2|)$$

$$A = \begin{pmatrix} \alpha(0) & 0 \\ 0 & K(0) \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = \alpha(0) \qquad \lambda_2 = K(0)$$

$$h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad h_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2) $(\bar{x}, 0)$

$z_1 = x - \bar{x}$

$z_2 = y$

.....

$$A = \begin{pmatrix} \alpha'(\bar{x})\bar{x} & -V(\bar{x}) \\ 0 & K(\bar{x}) \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} \lambda_1 = \alpha'(\bar{x})\bar{x} \\ \lambda_2 = K(\bar{x}) \end{cases} \to \begin{cases} > 0, & \bar{x} > x^* \\ < 0, & \bar{x} < x^* \end{cases}$$

~~2) 1) ???~~

3) (x^*, y^*)

.....

$$A = \begin{pmatrix} \alpha'(x^*)x^* + \alpha(x^*) - V'(x^*)y^* & -V(x^*) \\ K'(x^*)y^* & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = \frac{-\delta \pm \sqrt{D}}{2}, \quad D = \delta^2 - 4K'(x^*)y^* V(x^*)$$

3.1) $\delta > 0$, $D > 0$ — устойчивый узел

3.2) $\delta > 0$, $D < 0$ — устойчивый фокус

WAŻNE	NOW

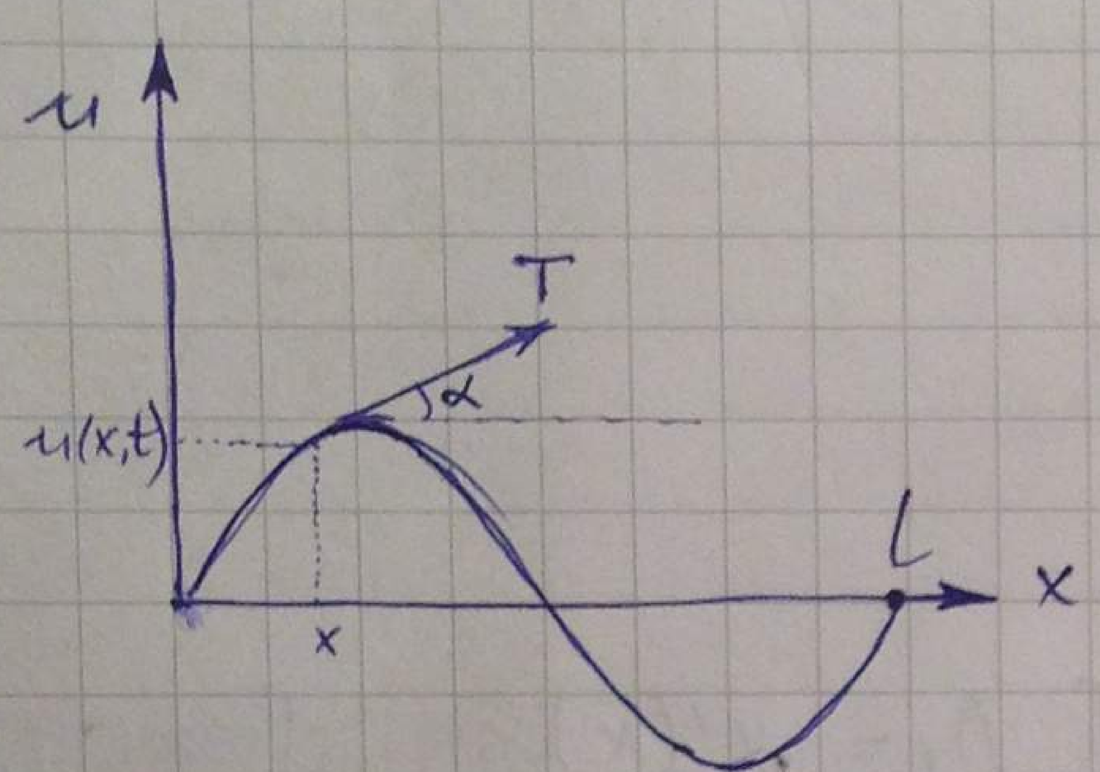
Уравнения математической физики

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xt} + a_{22}u_{tt} + F(u_x, u_t, u) = 0, \quad u = u(x,t)$$

1. $a_{12}^2 - a_{11}a_{12} > 0$ – ур-ие гиперболического типа. (описывает колебательные процессы)
2. $a_{12}^2 - a_{11}a_{12} < 0$ – ур-ие эллиптического типа (потоки жидкости, эл. потенциал в пр-ве)
3. $a_{12}^2 - a_{11}a_{12} = 0$ – ур-ие параболического типа (теплопроводность, диффузия)

1. Уравнения гиперболического типа.

а) поперечные колебания струны



$$dl = \sqrt{(dx)^2 + (du)^2} = \sqrt{(dx)^2 + tg^2\alpha (dx)^2} =$$
$$= dx\sqrt{1 + tg^2\alpha} \overset{?}{=} dx\sqrt{1 + (u_x)^2} \approx dx$$
$$L = \int_{x_1}^{x_2} dl \approx x_2 - x_1$$

Натяжение струны во всех точках равно натяжению невозмущенной струны T_0. Не зависит от времени (по з-ну Гука)

$$F_1 = T_0 \sin\alpha_1$$
$$F_2 = -T_0 \sin\alpha_2$$
$$F_1 - F_2 = T_0(\sin\alpha_1 - \sin\alpha_2) \approx T_0(tg\alpha_1 - tg\alpha_2) \approx$$
$$T_0(u_x(x+dx,t) - u_x(x,t)) \overset{T.}{\approx} T_0 u_{xx}(x,t)\, dx$$

$m = dl \cdot \rho \cdot S \approx dx \cdot \rho \cdot S$, S – площадь поперечного сечения, ρ – линейная плотность струны

$$dv = u_t(x, t+dt) - u_t(x,t) \approx u_{tt}(x,t)\, dt$$

$\rho S u_{tt}\, dx\, dt = T_0 u_{xx}\, dx\, dt$ (II з-н Н.: $m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}$)

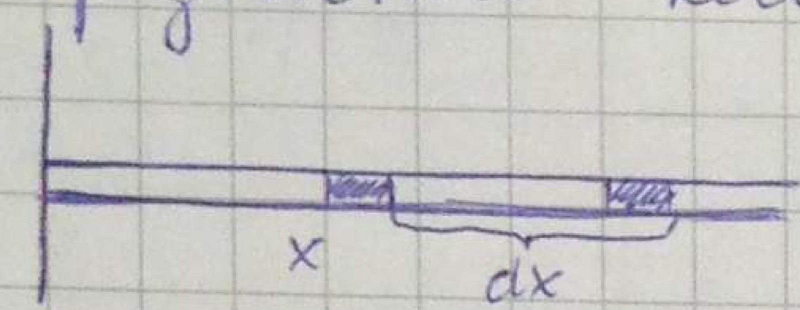
$\frac{T_0}{\rho S}u_{xx} - u_{tt} = 0$ или $\boxed{u_{tt} = a^2 u_{xx}}$

$a_{11} = \frac{T_0}{\rho S} > 0$, $a_{12} = 0$, $a_{22} = -1$ – ур-ие гиперб. типа, однородное ($f = 0$)

Если бы была вн. сила $f(x,t)$, то

$$\rho S u_{tt}\, dt\, dx = T_0 u_{xx}\, dx\, dt + f(x,t)\, dx\, dt$$
$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + F(x,t)$$
$$a^2 = \frac{T_0}{\rho S}, \quad F(x,t) = \frac{f(x,t)}{\rho S}$$

б) продольные колебания тонкого стержня

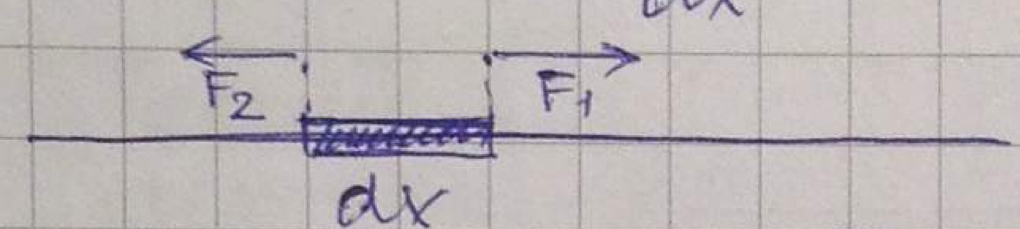


$u(x,t)$ – в момент t показывает смещ. точки, имевшей в положении равновесия абсциссу x (смещ. вдоль стержня)

Относительное удлинение элемента

$$\frac{x+dx+u(x+dx,t)-(x+u(x,t)) - dx}{dx} =$$

$$= \frac{u(x+dx,t)-u(x,t)}{dx} \xrightarrow{dx\to 0} u_x(x,t)$$



По з-ну Гука натяжение $F(x,t) = K(x)\cdot u_x(x,t)$

$$F_1 - F_2 = K(x+dx,t)\cdot u_x(x+dx,t) - K(x,t)\cdot u_x(x,t) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} K(x)\, u_x(x,t)\, dx$$

2 з-н Ньютона: $m\,dv = F\,dt$

$$\frac{\partial}{\partial x} K(x)\frac{\partial u}{\partial x}\,dx\,dt = \rho S dx\,[u_t(x,\cancel{t}+dt) - u_t(x,t)]$$

$$\frac{\partial}{\partial x} K(x)\frac{\partial u}{\partial x}\,dx\,dt = \rho S\, u_{tt}(x,t)\,dt\,dx$$

$$u_{tt} = \frac{1}{\rho S}\frac{\partial}{\partial x} K(x)\frac{\partial}{\partial x} u(x,t)$$

$\exists\ K(x) = k$

$$u_{tt} = \frac{k}{\rho S} u_{xx}$$

Вывод телеграфных уравнений

$i(x,t)$ – сила тока

$u(x,t)$ – напряжение u_x – падение напр. на участке един. длины

R – сопротивление единицы длины проводника

По з-ну Кирхгофа

$$u_x dx + iR dx + i_t L dx = 0$$

Кол-во электричества, притекающее на э-т провода dx за время dt

$$[i(x,t) - i(x+dx,t)]\,dt \overset{T.}{=} -i_x\,dx\,dt$$

(пренебрегаем потерей б.м. выс.)

Кол-во электричества, необходимое для зарядки эл-та dx

$$C\cdot[u(x,t+dt) - u(x,t)]\,dx \overset{T.}{=} C u_t\,dx\,dt \text{, где } C \text{ – емкость}$$

$$u = q/C$$

$$Cu_t\,dx\,dt = -i_x\,dx\,dt$$

$$\begin{cases} Cu_t + i_x = 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ u_x + iR + i_t L = 0 & C\cdot\frac{\partial}{\partial t} \end{cases}$$

$$\begin{cases} Cu_{xt} + i_{xx} = 0 \\ Cu_{xt} + CRi_t + CLi_{tt} = 0 \end{cases}$$

$$i_{tt} = \frac{1}{CL} i_{xx} - \frac{R}{L} i_t$$

Если пренебречь сопротивлением,

$$\begin{cases} i_{tt} = a^2 i_{xx} \\ u_{tt} = a^2 u_{xx} \end{cases}, \quad a = \sqrt{\frac{1}{CL}}$$

Гиперболические ур-ия.

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} \\ u(0,t) = u(l,t) = 0 \\ u(x,0) = \varphi(x) \\ u_t(x,0) = \psi(x) \end{cases}$$ — ур-ие свободных колебаний струны

Решение методом разделения переменных

$\varphi(x)$, $\psi(x)$ в ряд Фурье

$$u_n(x,t) = \left[A_n \cos\left(\frac{\pi n}{l} at\right) + B_n \sin\left(\frac{\pi n}{l} at\right)\right] \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right)$$

$A_n = \varphi_n$, φ_n — коэфф. Фурье

$B_n = \frac{1}{\pi n a}\psi_n$ ψ_n — коэфф. Фурье

$$\varphi_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(\xi)\sin\frac{\pi n}{l}\xi\,d\xi$$

Задача.

$$\begin{cases} \varphi(x) = \sin \frac{3\pi}{L} x \\ \psi(x) = 0 \end{cases} \rightarrow \quad A_n = 0 \ \forall n \neq 3, \ A_3 = 1 \quad B_n = 0 \ \forall n$$

$$u_n = 0 \ \forall n \neq 3$$

$$u_3(x,t) = \left(\cos \frac{3\pi}{L} t\right) \cdot \cancel{\cos} \sin \frac{3\pi}{L} x$$

$$u(x,t) = \cos\left(\frac{3\pi}{L} t\right) \cdot \sin\left(\frac{3\pi}{L} x\right)$$

2. Уравнения параболического типа.

$$a_{12}^2 - a_{11} a_{12} = 0$$

Задача теплопроводности

Тонкий (т.е. температура в $\forall$ точке сечения одинакова) стержень длины l. Температура на концах u_1 и u_2.

$$u(x) = u_1 + \frac{u_2 - u_1}{L} x$$

$$j(x,t) = -k(u) \frac{\partial u}{\partial x}$$ – поток тепла через единицу площади за единицу времени.

$$Q = cm \Delta u, \quad c \text{ – уд. теплоемкость}$$
$$dm = \rho S dx$$

$$\rho S dx \cdot c \cdot (u(x, t+dt) - u(x,t)) = dQ$$

$$S(j(x,t) - j(x+dx, t)) = dQ$$

$$\rho \cancel{S} C \frac{\partial u}{\partial t} \cancel{dt}\, dx = -\cancel{S} \frac{\partial j}{\partial x} dx = \cancel{S} \frac{\partial}{\partial x} k(u(x,t)) \frac{\partial u}{\partial x} \cancel{dx\, dt}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{\rho C} \frac{\partial}{\partial x} K(u(x,t)) \frac{\partial u}{\partial x}$$

Если $K(x) = k$, получим $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{k}{\rho C} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

$$u_t = a^2 u_{xx}$$

Если есть внешние потери $F(x,t)$, $u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t)$

$$f(x,t) = \frac{1}{\rho c S} F(x,t)$$

$a^2 = \frac{k}{\rho c}$ – коэфф. температуропроводности

GODZINA TIME 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22
DZIEN DAY 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31
MIESIAC MONTH 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

Решение задачи теплопроводности методом разд. перем.

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} \\ u(0,t) = u(l,t) = 0 \\ u(x,0) = \varphi(x) \\ \varphi(0) = \varphi(l) = 0 \end{cases}$$

Разделение переменных ...

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \exp\left(-\frac{a^2\pi^2 n^2}{l^2} t\right) \sin \frac{\pi n}{L} x,$$

где $C_n = \varphi_n$ – коэфф. Фурье

Введем обозначение

$$G(x,\xi,t) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{a^2\pi^2 n^2}{L} t\right) \sin \frac{\pi n}{L} x \sin \frac{\pi n}{L} \xi$$

(ф-ия Грина, ф-ия мгновенного точечного источника)

Тогда $u(x,t) = \int_0^l G(x,\xi,t)\,\varphi(\xi)\,d\xi$

Если есть внешний ист. тепла, т.е. $u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t)$, $\varphi(x) = 0$,

раскладываем $f(x,t)$ в ряд Фурье,

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t \exp\left(-\frac{a^2\pi^2 n^2}{L}(t-\tau)\right) \cdot f_n(\tau)\,d\tau \cdot \sin \frac{\pi n}{L} x$$

вывод?

Неоднородное: $u(0,t) = \mu_1(t)$

$u(l,t) = \mu_2(t)$?

WAZNE NOW

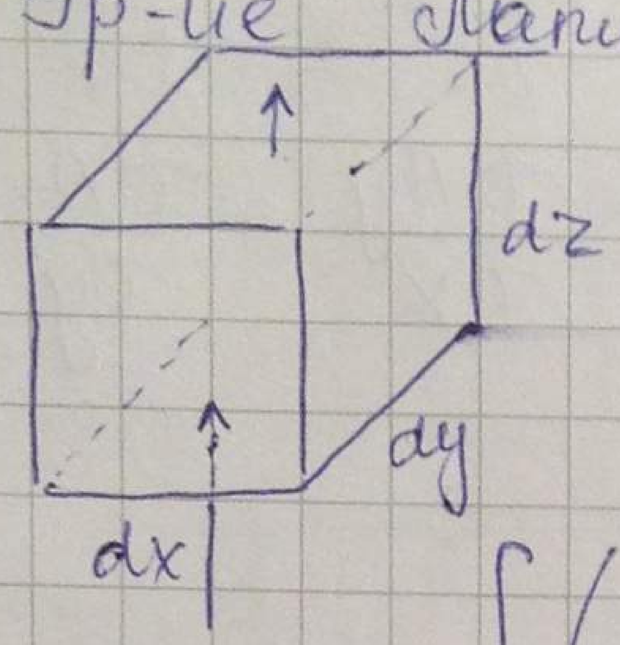
3. Уравнения эллиптического типа.

$\Delta u = 0$ — ур-ие Лапласа

Если есть внешние стац. источники, ур-ие Пуассона $\Delta u = -f$

$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ — оператор Лапласа

Ур-ие Лапласа в трехмерном пр-ве



поток тепла $j(x,y,z)$

$$\Downarrow$$

$$\Big[\big(j_x(x,y,z) - j_x(x+dx,y,z)\big)dydz +$$
$$+\big(j_y(x,y,z) - j_y(x,y+dy,z)\big)dxdz +$$
$$+ j_z(x,y,z) - j_z(x,y,z+dz)\big)dxdy\Big]\cdot dt =$$
$$= c\rho\Big[\underbrace{u(x,y,z,t+dt) - u(x,y,z,t)}_{\frac{\partial u}{\partial t}dt}\Big]dxdydz$$

$j_x = -k\frac{\partial u}{\partial x}$ $\quad j_y = -k\frac{\partial u}{\partial y}$ $\quad j_z = -k\frac{\partial u}{\partial z}$

$$c\rho\frac{\partial u}{\partial t}dxdydzdt = k\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right]dxdydz\,dt$$

$$a^2 = \frac{k}{c\rho} = 1$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \cancel{a^2}\,\Delta u$$

Тело может быть анизотропным: $k_x \neq k_y \neq k_z$ (кристаллы)

<u>Теория поле</u>

$f(x,y,z)$ — скалярная ф-ия

$\mathrm{grad}\, f = \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$ — вектор.

$\mathrm{div}\, \vec{j} = \frac{\partial}{\partial x}j_x + \frac{\partial}{\partial y}j_y + \frac{\partial}{\partial z}j_z$

$\mathrm{div}\,\mathrm{grad}\, f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial z^2}$

$$\operatorname{rot} \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i}_x & \vec{i}_y & \vec{i}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

Для безвихревого поля $\operatorname{rot}\vec{A} = 0$, т.е. $\frac{\partial A_z}{\partial y} = \frac{\partial A_y}{\partial z}$,

$$\frac{\partial A_z}{\partial x} = \frac{\partial A_x}{\partial z}$$

$$\frac{\partial A_y}{\partial x} = \frac{\partial A_x}{\partial y}$$

Поле $\vec{A}$ безвихревое $\leftrightarrow$

$\exists \varphi : \ \vec{A} = \operatorname{grad} \varphi$

($\text{т. к. } \operatorname{rot} \operatorname{grad} = 0$)

Задача

В некоторой проводящей среде протекает ток. Заряд не накапливается.

λ – проводимость, λ^{-1} – сопротивление

?

З-н Ома: $E = \frac{j}{\lambda}$

$\operatorname{div} \vec{j} = 0$

2-е ур-ие Максвелла

μ – магн. проницаемость

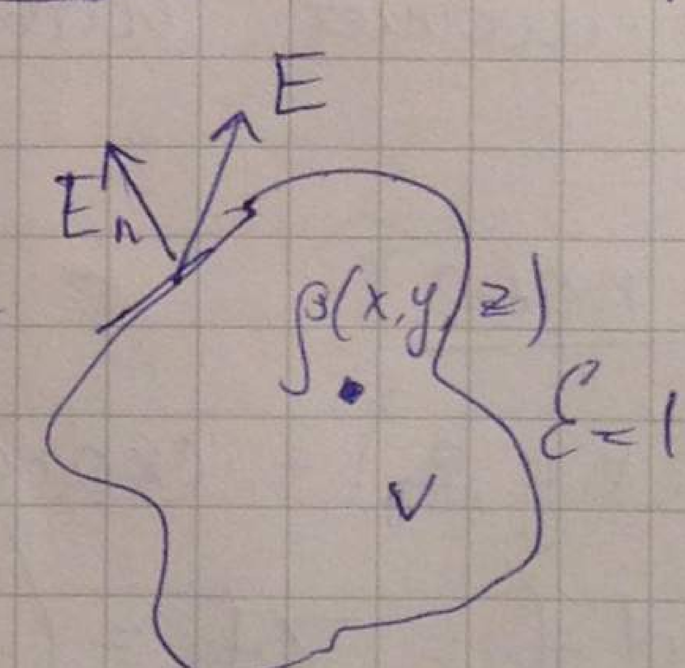
$\vec{E}$ – напряженность эл. поля

$\frac{\mu}{c} \underset{0}{\underset{\parallel}{\vec{H}}} \overset{?}{=} \operatorname{rot} \vec{E} \to \operatorname{rot} \vec{E} = 0 \to$ поле безвихревое

$\to \vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi$

$0 = \operatorname{div} \vec{j} = \operatorname{div}(\lambda \vec{E}) = -\lambda \underbrace{\operatorname{div} \operatorname{grad}}_{\Delta} \varphi \to \Delta \varphi = 0$

(φ – потенциал)



$\rho(x,y,z)$ – объемн. плотность заряда

$\varepsilon = 1$ – диэл. проницаемость

$$\iint_S E_n dS = 4\pi \iiint_V \rho \, dV$$

Т. Остроградского-Гаусса:

$$\iint_S E_n dS = \iiint_V \operatorname{div} \vec{E} \, dV \to 4\pi \iiint_V \rho \, dV = \iiint_V \operatorname{div} \vec{E} \, dV$$

$$\operatorname{div} \vec{E} = 4\pi\rho$$

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = -4\pi\rho$$

$$\Delta \varphi = \underset{f}{\underset{\parallel}{-4\pi\rho}}$$ – ур-ие Пуассона

Лапласиан в сфер системе координат

$z = r\cos\theta$

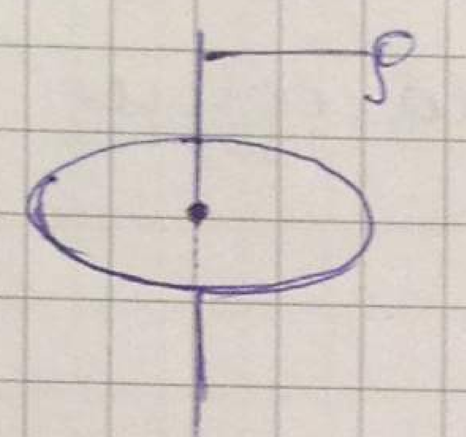
$\rho = r\sin\theta$

$x = r\sin\theta\cos\varphi$

$y = r\sin\theta\sin\varphi$

$$\Delta_{r,\varphi,\theta} u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}$$

Задача



$$\frac{\partial}{\partial\rho}\rho\frac{\partial u}{\partial\rho} = 0$$

$$\rho\frac{\partial u}{\partial\rho} = C \to \frac{\partial u}{\partial\varphi} = \frac{C}{\rho} \to u = C_1\ln\rho + C_2$$

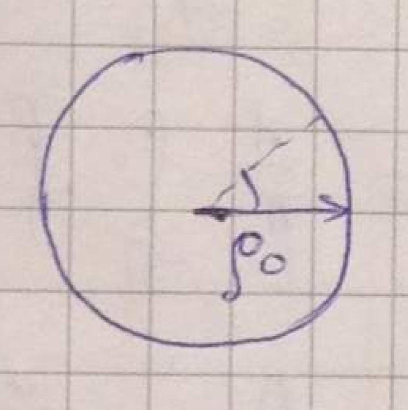
$\exists\ C_1 = 1,\ C_2 = 0 \to \ln\rho$ – фунд. реш. ур-ия Лапласса

Задача на круге

$\Delta u = 0$

$u(\rho_0, \varphi) = f(\varphi)$

$u(\rho, \varphi) = R(\rho)\Phi(\varphi)$



от z не зависит

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\rho\frac{\partial u}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} = 0$$

$$\Phi(\varphi)\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\rho\frac{\partial R(\rho)}{\partial\rho} + \frac{R(\rho)}{\rho^2}\frac{\partial^2\Phi(\varphi)}{\partial\varphi^2} = 0$$

$$\frac{\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial R}{\partial\rho}\right)}{\frac{R}{\rho}} = -\frac{\Phi''}{\Phi} = \text{const} = \lambda$$

$\Phi'' + \lambda\Phi = 0$

$\Phi = A\cos\sqrt{\lambda}\,\varphi + B\sin\sqrt{\lambda}\,\varphi$

Должно вып-ся: $u(\varphi + 2\pi, \rho) = u(\varphi, \rho) \to \sqrt{\lambda} = n,\ \lambda_n = n^2$

$R(\rho) = \rho^M$

$$\frac{\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dR}{d\rho}\right)}{\frac{R}{\rho}} = n^2 \qquad R = \rho^{\mu},\ \mu^2 = n^2,\ \mu = \pm n$$

$$R(\rho) = C\rho^{n} + D\rho^{-n}$$

Внутри круга $D = 0$, $u_n = \rho^{n}(A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi)$

Вне круга $C = 0$, $u_n = \rho^{-n}(A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi)$

Раскладываем $f(\varphi)$ в ряд Фурье $\to$ находим A_n, B_n

$$f(\varphi) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum \alpha_n \cos n\varphi + \beta_n \sin n\varphi,$$

$$\alpha_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\xi)\,d\xi$$

$$\alpha_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\xi)\cos n\xi\,d\xi$$

$$\beta_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\xi)\sin n\xi\,d\xi$$

$$A_0 = \frac{\alpha_0}{2} \qquad A_n = \frac{\alpha_n}{\rho_0^{\,n}} \qquad B_n = \frac{\beta_n}{\rho_0^{\,n}}$$